ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ ЗАДАЧИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ДВИЖЕНИЕ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

© В. С. Белоносов, Т. И. Зеленяк

Новосибирск, Россия

В настоящем докладе рассматриваются математические вопросы, возникшие при описании гидродинамических процессов в лабораторном вихревом биореакторе, изображенном на рисунке 1. Такие реакторы используются при разработке новых биотехнологий, обеспечивающих мягкие условия перемешивания суспензии клеток при высокой скорости межфазного массообмена.

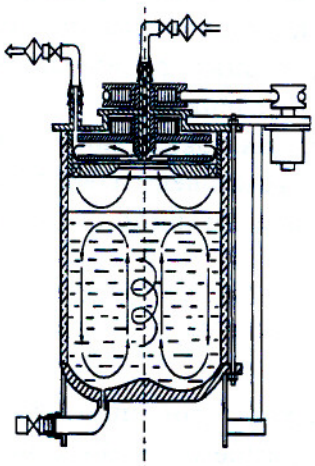

Рис. 1. Схема вихревого биореактора.

В камеру, заполненную вязкой несжимаемой жидкостью, поступает закрученный поток газа, выходящий затем через торцевое отверстие. За счет трения на границе раздела фаз и разницы давлений в центре и на периферии газового потока в камере устанавливается течение жидкости, вращающееся относительно оси емкости с одновременным нисходящим движением на периферии и восходящим — в приосевой зоне. Математическое моделирование такого течения представляет значительный практический интерес в связи с разработкой большеобъемных промышленных реакторов для медицинских биотехнологий. Мы остановимся на описании восходящего потока в приосевой зоне (рисунок 2), ограниченной поверхностями $r = R$, $z = 0$ и $z = h$ в цилиндрических координатах (r, φ, z).

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (номер проекта 00-01-00912).

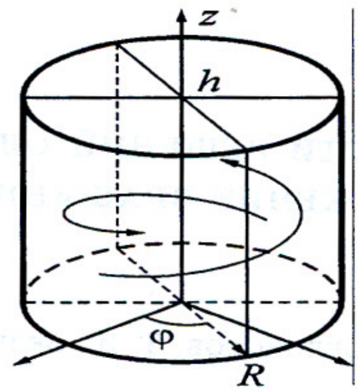

Рис. 2. Течение в приосевой зоне.

Задача о протекании жидкости через заданную область, на границе которой имеются участки втекания и вытекания, исследуется уже давно. Первые результаты в этом направлении получены Н.Е. Кочиным еще в 1956 году [1]. Однако до сих пор корректные постановки задач протекания удалось найти лишь для идеальной жидкости, причем даже в этом модельном случае соответствующие теоремы существования имеют локальный характер (см. [2]). Для вязкой жидкости удовлетворительной теории пока нет. Принципиальная трудность состоит здесь в правильной постановке граничных условий на участке вытекания. Мы попытаемся преодолеть эту трудность за счет дополнительных физически оправданных предположений о характере изучаемого вихревого течения.

Экспериментальные исследования показывают (см. [3]), что вблизи оси реактора радиальная V^r и угловая V^φ компоненты вектора скорости зависят только от времени t и расстояния r до оси цилиндра, осевая же компонента V^z линейна относительно z:

$$V^r = V^r(r,t), \quad V^\varphi = V^\varphi(r,t), \quad V^z = V_1^z(r,t) + z\,V_2^z(r,t). \tag{1}$$

Далее всюду будем придерживаться этой гипотезы.

Допустим, что плотность ρ и кинематическая вязкость ν жидкости постоянны. С учетом (1) запишем для скорости (V^r, V^φ, V^z) и давления P систему уравнений Навье — Стокса в цилиндрических координатах. Переходя к новой независимой переменной $x = r^2$ и новым неизвестным функциям

$$U(x,t) = -rV^r/\nu, \quad V(x,t) = rV^\varphi/\nu, \quad W(x,t) = V^z = W_1(x,t) + z\,W_2(x,t),$$

получим

$$\begin{aligned}
U_t &= 4\nu\, xU_{xx} + 2\nu\, UU_x - \frac{\nu}{x}\,\left(U^2 + V^2\right) + \frac{2x}{\nu\rho}\,P_x,\\
V_t &= 4\nu\, xV_{xx} + 2\nu\, UV_x + \frac{1}{\nu\rho}\,P_\varphi,\\
W_t &= 4\nu\, xW_{xx} + 2\nu\, UW_x + 4\nu\, W_x - WW_z + \frac{1}{\rho}\,P_z,\\
W_z &= 2\nu\, U_x.
\end{aligned}$$

На основании третьего уравнения давление P должно быть многочленом второго порядка относительно z, а из первых двух уравнений следует, что этот многочлен записывается в виде

$$P = P_0(x,t) + z\,P_1(t) + \frac{z^2}{2}\,P_2(t).$$

Разлагая теперь третье уравнение по степеням переменной z, находим

$$\begin{aligned}
U_t &= 4\nu\,xU_{xx} + 2\nu\,UU_x - \frac{\nu}{x}\,\left(U^2+V^2\right) + \frac{2x}{\nu\rho}\,P_{0x},\\
V_t &= 4\nu\,xV_{xx} + 2\nu\,UV_x,\\
W_{1t} &= 4\nu\,xW_{1xx} + 2\nu\,UW_{1x} + 4\nu\,W_{1x} - W_1W_2 + \frac{1}{\rho}\,P_1,\\
W_{2t} &= 4\nu\,xW_{2xx} + 2\nu\,UW_{2x} + 4\nu\,W_{2x} - W_2^2 + \frac{1}{\rho}\,P_2,\\
W_2 &= 2\nu\,U_x.
\end{aligned}$$

С помощью последнего уравнения исключим из рассмотрения функцию W_2 и окончательно придем к системе

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\nu}\,U_t\ &= xU_{xx} + \frac{1}{2}\,UU_x - \int\limits_0^x U_\xi^2(\xi,t)\,d\xi - \frac{x}{8\rho\nu^2}\,P_2(t),\\
\frac{1}{4\nu}\,V_t\ &= xV_{xx} + \frac{1}{2}\,UV_x,\\
\frac{1}{4\nu}\,W_{1t} &= xW_{1xx} + (U/2+1)\,W_{1x} - \frac{1}{2}\,U_xW_1 - \frac{1}{4\rho\nu}\,P_1(t),\\
\frac{x}{2\rho\nu^2}\,P_{0x} &= \frac{1}{4x}\,\left(U^2+V^2\right) - \int\limits_0^x U_\xi^2(\xi,t)\,d\xi - \frac{x}{8\rho\nu^2}\,P_2.
\end{aligned}\tag{2}$$

Здесь мы воспользовались тем обстоятельством, что функции U и V должны по определению обращаться в нуль при $x=0$:

$$U(0,t) = V(0,t) = 0. \tag{3}$$

Математическая постановка задачи завершается указанием начально-краевых условий. В данном случае естественно задать все компоненты вектора скорости U, V, W_1 и W_2 в начальный момент $t=0$, постоянную скорость на периферии вихря, то есть при $r=R$, а также нормальную компоненту P_z градиента давления на участке втекания жидкости, то есть при $z=0$. Последнее условие означает, что функция $P_1(t)$ считается известной. Кроме того, в силу равенства $W_2 = 2\nu\,U_x$ все требования к уже исключенной из рассмотрения функции W_2 следует отнести к производной U_x. Таким образом, мы получаем следующую начально-краевую задачу: найти функции $U(x,t)$, $V(x,t)$, $W_1(x,t)$, $P_0(x,t)$ и $P_2(t)$, удовлетворяющие системе (2) в прямоугольнике $0<x<R^2$, $0<t<T$, условиям регулярности (3) при $x=0$, а также начальным и краевым условиям:

$$U(x,0) = U_0(x), \quad V(x,0) = V_0(x), \quad W_1(x,0) = W_{10}(x); \tag{4}$$

$$U(a,t) = U_1,\ U_x(a,t) = U_2,\ V(a,t) = V_1,\ W_1(a,t) = W_{11}\ (a=R^2). \tag{5}$$

Заметим, что в системе (2) ключевым является первое уравнение. Если из этого уравнения и условий (3)–(5) удастся найти функции U и P_2, то определение всех оставшихся неизвестных сведется к решению простых линейных задач. Поэтому далее основное внимание будет уделено первому уравнению системы (2). Нами исследовались как классические, так и обобщенные решения этого уравнения (см. [4]). Для краткости мы рассмотрим здесь только классические решения.

Прежде всего преобразуем данное уравнение, выразив P_2 через U. Это нетрудно сделать, интегрируя уравнение по переменной x в пределах от 0 до a. Учитывая (3)–(5), получим задачу

$$\frac{1}{4\nu}\left[U_t - \frac{2x}{a^2}\int\limits_0^a U_t(\xi,t)\,d\xi\right] = xU_{xx} + \frac{1}{2}\,UU_x - \int\limits_0^x U_\xi^2(\xi,t)\,d\xi +$$

$$+\frac{2x}{a^2}\int\limits_0^a (a-\xi)U_\xi^2(\xi,t)\,d\xi + \frac{2x}{a^2}\left(U_1 - aU_2 - U_1^2/4\right), \qquad (6)$$

$$U(0,t)=0, \quad U(a,t)=U_1, \quad U(x,0)=U_0(x).$$

Условие $U_x(a,t)=U_2$ можно опустить, так как оно автоматически выполняется для всякого регулярного решения задачи (6).

Пусть $G(x)$ - стационарное решение (6), принадлежащее пространству $C^1([0,\,a])$ и дважды непрерывно дифференцируемое в открытом промежутке $0<x<a$. Существование таких решений подробно изучено Н.Э. Кейльманом [5]. Показано, в частности, что совокупность пар $(U_1,\,U_2)$, для которых стационарная задача имеет решения, образует непустое замкнутое множество на плоскости. Нас будут интересовать нестационарные решения, близкие к $G(x)$. В связи с этим целесообразно перейти к новой неизвестной функции $u=U-G$:

$$Lu \equiv \frac{1}{4\nu}\left[u_t - \frac{2x}{a^2}\int\limits_0^a u_t\,d\xi\right] - xu_{xx} - \frac{1}{2}\,(Gu)_x + 2\int\limits_0^x G_\xi u_\xi\,d\xi -$$

$$-\frac{4x}{a^2}\int\limits_0^a (a-\xi)G_\xi u_\xi\,d\xi = \frac{1}{2}\,uu_x - \int\limits_0^x u_\xi^2\,d\xi + \frac{2x}{a^2}\int\limits_0^a (a-\xi)u_\xi^2\,d\xi \equiv N(u), \qquad (7)$$

$$u(0,t)=u(a,t)=0, \qquad (8)$$

$$u(x,0)=U_0(x)-G(x)\equiv u_0(x). \qquad (9)$$

Наряду с нелинейным уравнением (7) рассмотрим также соответствующее линеаризованое уравнение, полученное из (7) заменой $N(u)$ на $f(x,t)$:

$$Lu = f(x,t). \qquad (10)$$

Так как оператор N превращает любую гладкую функцию, удовлетворяющую условиям (8), в функцию, ортогональную единице, то относительно f естественно предположить, что

$$\int\limits_0^a f(x,t)\,dx = 0. \qquad (11)$$

Мы ограничимся изучением классических решений $u(x,t)$, имеющих при $t > 0$, $0 \leqslant x \leqslant a$ непрерывные производные u_t и u_{xx}, а также непрерывную вплоть до $t = 0$ производную u_x. Любое такое решение задачи (7)–(9), а при выполнении (11) — и задачи (8)–(10), удовлетворяет условию $u_x(a,t) = 0$. Поэтому от начальных данных u_0 необходимо потребовать выполнения условий согласования $u_0(0) = u_0(a) = u_0'(a) = 0$.

Линеаризованную задачу (8)–(10) удобно привести к виду, разрешенному относительно производной по t. Для этого рассмотрим отображение

$$\Phi : u(x) \longrightarrow v(x) = u(x) - \frac{2x}{a^2} \int\limits_0^a u(\xi)\, d\xi,$$

определенное на множестве

$$\mathcal{D} = \left\{\, u \in C^1([\,0,\, a\,]) : u(0) = u(a) = u'(a) = 0 \,\right\}.$$

Нетрудно проверить, что отображение Φ взаимно однозначно, область его значений равняется

$$\mathcal{R} = \left\{\, v \in C^1([\,0,\, a\,]) : \int\limits_0^a v(\xi)\, d\xi = 0,\ v(0) = 0,\ av'(a) = v(a) \,\right\},$$

причем обратное преобразование имеет вид

$$\Phi^{-1} : v(x) \longrightarrow u(x) = v(x) - \frac{x}{a}\, v(a).$$

Переходя к новой неизвестной функции $v = \Phi(u)$, получим эквивалентную (8)–(10) краевую задачу:

$$\frac{1}{4\nu}\, v_t - f(x,t) = x v_{xx} + \frac{1}{2}\,(Gv)_x - 2 \int\limits_0^x G' v_\xi\, d\xi + \frac{4x}{a^2} \int\limits_0^a (a-\xi) G' v_\xi\, d\xi -$$

$$- \frac{v(a,t)}{a} \left[\frac{1}{2}\, x G'(x) - \frac{3}{2}\, G(x) + \frac{4x}{a^2} \int\limits_0^a G(\xi)\, d\xi \right]; \tag{12}$$

$$\int\limits_0^a v(\xi,t)\, d\xi = 0, \quad v(0,t) = 0, \quad a v_x(a,t) = v(a,t); \tag{13}$$

$$v(x,0) = v_0(x) \equiv \Phi(u_0). \tag{14}$$

Для формулировки результатов о разрешимости этой задачи нам понадобятся соответствующие пространства функций. Пусть $\|\cdot\|_k$ — обычная норма в пространстве $C^k([\,0,\, a\,])$. Символом $C^{k,0}(Q)$, где $Q = [\,0,\, a\,] \times [\,0,\, T\,]$, обозначим пространство функций, имеющих в Q непрерывные производные по x порядка k. Норма в $C^{k,0}(Q)$ определена формулой

$$\|v\|_{k,0}^{Q} = \sup_{t\leqslant T} \|v(x,t)\|_k .$$

Множество функций из $C^{k,0}(Q)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{k,\alpha}^{Q} = \|v\|_{k,0}^{Q} + \sup_{\tau\leqslant t\leqslant T} \frac{\|v(x,t)-v(x,\tau)\|_k}{(t-\tau)^\alpha}, \ (0<\alpha<1),$$

обозначим через $C^{k,\alpha}(Q)$.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (11) *и* $f(x,t) = xg(x,t)$, *где* g *непрерывна в* Q *и принадлежит* $C^{0,\alpha}$ *в каждом прямоугольнике* $Q_\tau = [0,a]\times[\tau,T]$, $0<\tau<T$; *начальные данные* v_0 *принадлежат* C^1 *и удовлетворяют условиям* (13). *Тогда задача* (12) - (14) *имеет единственное классическое решение. Это решение обладает свойствами:* $v\in C^{1,0}(Q)$; v_t *и* v_{xx} *непрерывны при* $t>0$; v_x *принадлежит* $C^{0,\alpha}(Q_\tau)$ *при всех* $0<\tau<T$. *Кроме того,*

$$\|v\|_{1,0}^{Q} \leqslant c(T)\cdot\left[\|v_0\|_1 + \|g\|_{0,0}^{Q}\right]; \tag{15}$$

$$\|v_\tau(x,\tau)\|_0 + \|v(x,\tau)\|_2 \leqslant K_\alpha(\tau,\varepsilon)\cdot\left[\|v_0\|_1 + \|g\|_{0,0}^{Q} + \|g\|_{0,\alpha}^{Q_\varepsilon}\right],$$

где $0<\varepsilon<\tau$. *Если дополнительно* $v_0=0$, *то* $v\in C^{1,\beta}(Q)$ *с любым* $\beta<1/2$, *причем*

$$\|v\|_{1,\beta}^{Q} \leqslant c_\beta(T)\cdot\|g\|_{0,0}^{Q}. \tag{16}$$

Понятно, что эта теорема справедлива и для задачи (8)–(10) с той разницей, что начальные данные u_0 уже не обязательно ортогональны единице и удовлетворяют другим условиям согласования.

Вернемся к исходной нелинейной задаче (6) или, что то же самое, к задаче (7)–(9). Результат теоремы 1 позволяет стандартными методами установить для этих задач теорему об однозначной классической разрешимости "в малом" по t, если начальные данные непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют соответствующим условиям согласования. Можно также установить существование решений на любом фиксированном промежутке времени $[0,\,T]$, если начальные данные близки в метрике C^1 к $G(x)$ в случае задачи (6) или к нулю — в случае задачи (7)–(9).

Еще одно приложение теоремы 1 связано с изучением устойчивости стационарного решения $G(x)$ задачи (6). Напомним, что стационарное решение $G(x)$ называется устойчивым по Ляпунову в пространстве $C^1([0,\,a])$, если для всякого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что при каждых начальных данных $U_0\in C^1$, удовлетворяющих условиям согласования и неравенству $\|U_0-G\|_1\leqslant\delta$, задача (6) имеет единственное классическое решение, определенное при всех $t>0$, причем

$$\|U(x,t)-G(x)\|_1 \leqslant \varepsilon, \quad 0<t<\infty.$$

Нас интересует так называемый принцип линеаризации, то есть возможность судить об устойчивости или неустойчивости решений нелинейной задачи на основании исследования подходящего линейного приближения. В данном случае удобным линейным приближением является система (12)–(14), разрешенная относительно производной по t.

Обозначим через A линейный оператор, порожденный правой частью уравнения (12) в пространстве

$$\mathcal{B} = \left\{ v(x) : v(x)/x \in C([0, a])), \int\limits_0^a v(x)\,dx = 0 \right\}$$

с нормой $\|v\| = \|v(x)/x\|_0$. Область определения этого оператора — множество всех дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих стационарным условиям (13). Спектр оператора A состоит из изолированных собственных значений конечной кратности, локализованных в некотором секторе $|\arg(\lambda - \zeta)| \leqslant \pi - \gamma$ комплексной λ-плоскости с вещественной вершиной ζ и полууглом $\gamma < \pi$.

Асимптотическое поведение решений линеаризованной задачи (12)–(14) существенным образом зависит от расположения спектра оператора A по отношению к мнимой оси. Можно показать, что если весь спектр лежит в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < 0$, то константы $c(T)$ и $C_\beta(T)$ в неравенствах (15)–(16) равномерно ограничены при $0 < T < \infty$. Это утверждение позволяет обосновать следующий принцип линеаризации.

Теорема 2. *Пусть спектр оператора A лежит в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < 0$, тогда стационарное решение $G(x)$ нелинейной задачи (6) асимптотически устойчиво в пространстве C^1. Если же хотя бы одно собственное число оператора A имеет положительную вещественную часть, то $G(x)$ неустойчиво.*

Список литературы

1. Н.Е. Кочин, *Об одной теореме существования гидродинамики*, Прикл. математика и механика **20** (1956), no. 2, 153–172.
2. С.Н. Антонцев, А.В. Кажихов, В.Н. Монахов, *Краевые задачи механики неоднородных жидкостей*, Наука, Новосибирск, 1983.
3. Э.П. Волчков, В.И. Кислых, И.И. Смульский, *Экспериментальное исследование аэродинамики вихревой камеры с торцевым вдувом*, Структура пристенного пограничного слоя, Новосибирск, 1978.
4. В.С. Белоносов, Т.И. Зеленяк, *Об одной нестационарной модели вихря*, Нестационарные проблемы гидродинамики, выпуск 20, Институт гидродинамики СО АН СССР, Новосибирск, 1982, pp. 14–26.
5. Н.Э. Кейльман, *О разрешимости краевых задач для некоторых нелинейных дифференциальных уравнений, возникающих в приложениях*, Канд. диссертация, НГУ, Новосибирск, 1984.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр.Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия